

6. Unde în medii elastice

- 6.1. Undele mecanice și propagarea lor în medii elastice
- 6.2. Unde longitudinale și unde transversale
- 6.3. Viteza de propagare a undelor longitudinale și transversale
- 6.4. Frontul de undă. Suprafața de undă. Unde sferice și unde plane. Principul lui Huygens
- 6.5. Ecuația undei plane
- 6.6. Reflexia și refracția undelor. Interferența undelor. Difracția undelor
- 6.7. Unde staționare

6.1 Undele mecanice și propagarea lor în medii elastice

Un fenomen fizic deosebit de important pentru transmisia informației la distanță, fără a necesita practic deplasarea din punctul de pornire până la destinație este acela al producerii de unde mecanice sau electromagnetice.

Definiție: Procesul de propagare al deformărilor din mediul elastic se realizează sub forma de undă.

Undele mecanice sunt caracterizate prin transportul de energie prin mediu datorită mișcării unei perturbații în acel mediu fără vreo mișcare în ansamblu a mediului însuși. **Forța de revenire** care acționează asupra tuturor particulelor mediului, deplasate față de poziția de echilibru, este datorată elasticității mediului. Particulele care se găsesc la distanța vT (distanța între pozițiile de echilibru) oscilează în aceeași fază.

*Definiție: Distanța parcursă de perturbație în timp de o perioadă se numește **lungime de undă**, și se notează cu λ .*

$$\lambda = v \cdot T = \frac{v}{\nu}. \quad (6.1)$$

Sursele oscilațiilor:

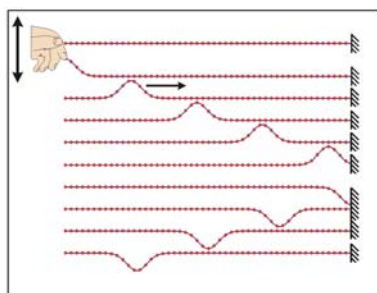


Fig. 6.1 Propagarea undelor transversale și longitudinale în medii elastice prin interacțiuni din aproape în aproape.

- Dacă o particulă dintr-un mediu elastic este pusă să oscileze, ea devine sursă de oscilație pentru toate celelalte particule ale mediului.
- Dacă o particulă dintr-un mediu elastic a intrat în oscilație, toate celelalte particule vor intra ulterior în oscilație și vor reproduce mișcarea primei particule dar cu întârziere.
- Propagarea oscilațiilor într-un mediu elastic se realizează din aproape în aproape datorită interacțiunilor ce există între particulele lui.

- Această propagare se realizează treptat și are o viteză finită.

6.2 Unde longitudinale și unde transversale

Definiție: Dacă mișcările particulelor care transportă unda mecanică au loc înainte și înapoi de-a lungul direcției de propagare atunci avem de-a face cu o **undă longitudinală**.

Caracteristică pentru undele longitudinale este modificarea distanței dintre particule care, însă în timpul oscilației rămân pe direcția de propagare a undei. Aceasta înseamnă că atunci când se propagă o undă longitudinală se produce o schimbare a densității lui în porțiunea respectivă. Undele longitudinale se pot produce în toate stările de agregare: solidă, lichidă și gazoasă.

*Definiție: Dacă mișcările particulelor care transportă unda mecanică sunt perpendiculare pe direcția de propagare atunci avem de-a face cu o **undă transversală**.*

În acest caz propagarea undei transversale este urmată și de deformarea mediului. Undele transversale sunt posibile numai când schimbarea formei mediului este urmată de apariția unor forțe elastice de revenire. Undele transversale se propagă numai în mediile solide și la suprafața lichidelor.

6.3 Viteza de propagare a undelor longitudinale și transversale

Se observă ca la propagarea oscilațiilor într-un mediu elastic se realizează și schimbarea fazei. Viteza de propagare a oscilațiilor într-un mediu elastic se mai numește și viteză de fază.

$$v = v \cdot \lambda = \frac{\lambda}{T}. \quad (6.2)$$

Experimental s-a stabilit că viteza de fază este determinată numai de proprietățile mediului și de starea lui de agregare.

În cazul undelor transversale, care se propagă într-o coardă întinsă, elasticitatea este măsurată de tensiunea T din coardă iar caracteristica inerțială de revenire este măsurată de masa unității de lungime a corzii, μ . Astfel viteza undelor transversale este:

$$v_t = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad (6.3)$$

*Definiție: **Viteza de propagare a undelor elastice transversale**, într-o coardă, se exprimă prin rădăcina pătrată a raportului dintre tensiunea din fir și masa unității de lungime a firului.*

Viteza undelor longitudinale în solide este:

$$v_l = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (6.4)$$

Definiție: Viteza de propagare a undelor elastice longitudinale în solide se exprimă prin rădăcina pătrată a raportului dintre modulul de elasticitate, E și densitatea solidului, ρ .

Viteza undelor longitudinale în lichide este:

$$v_l = \sqrt{\frac{\chi}{\rho}}. \quad (6.5)$$

Definiție: Viteza de propagare a undelor elastice longitudinale în lichide se exprimă prin rădăcina pătrată a raportului dintre modulul de compresibilitate, χ și densitatea lichidului, ρ .

Viteza undelor longitudinale în medii gazoase este:

$$v_l = \sqrt{\frac{c_p}{c_v} \frac{P}{\rho}}. \quad (6.6)$$

unde P este presiunea gazului iar c_p și c_v sunt respectiv căldurile specifice la presiune constantă și la volum constant.

Caracteristicile propagării undelor elastice:

- În medii izotrope undele mecanice se propagă în toate direcțiile cu aceeași viteză;
- Viteza de propagare nu depinde de intensitatea perturbației;
- În cazul mediilor solide $v_t < v_l$;
- Viteza de propagare a undelor depinde de proprietățile fizice ale mediului;

- La trecerea undei dintr-un mediu în altul frecvența de oscilație, v rămâne constantă dar lungimea de undă, λ variază corespunzător cu variația vitezei, v .

6.4 Frontul de undă. Suprafața de undă. Unde sferice și unde plane. Principiul lui Huygens

În mediile elastice undele pot fi unidimensionale, bidimensionale și tridimensionale, depinzând de numărul de direcții din spațiu în care se propagă unda.

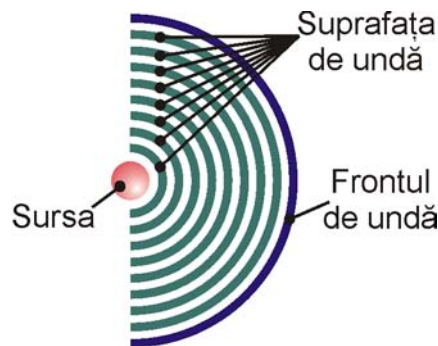


Fig. 6.2 Reprezentarea unei unde sferice care se propagă de la stânga la dreapta.

Definiție: Locul geometric al punctelor la care ajunge oscilația la un moment dat se numește **front de undă**.

Frontul de undă reprezintă acea suprafață care separă partea din spațiu intrată în oscilație de partea din spațiu care urmează să intre în oscilație. Unda are un singur front de undă și care se deplasează continuu.

Definiție: **Suprafața de undă** este locul geometric al punctelor care oscilează în aceeași fază.

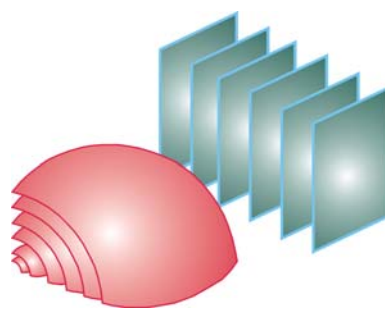


Fig. 6.3 Unde sferice și unde plane.

Suprafața de undă poate fi dusă prin orice punct din spațiu care oscilează și este fixă. Numărul suprafețelor de undă este foarte mare, teoretic infinit.

Definiție: O linie perpendiculară pe frontul de undă, care indică direcția de propagare a undelor se numește **rază**.

Definiție: Unda a cărei suprafață de undă este un plan se numește undă plană.

Definiție: Unda a cărei suprafață de undă este o sferă se numește undă sferică.

Principiul lui Huygens

Se poate arăta că mai multe unde sferice dispuse liniar pot da naștere la o undă plană și dacă avem o astfel de undă plană care este lăsată să treacă printr-un orificiu atunci se produce o undă sferică. După Huygens forma fundamentală a tuturor tipurilor de undă, numita **unda elementară** este unda sferică.

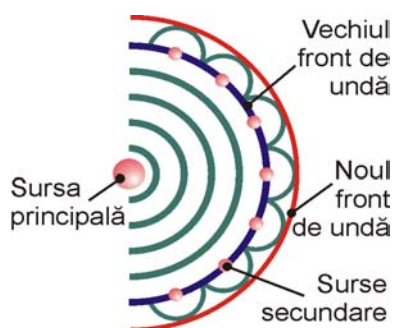


Fig. 6.4 Ilustrarea principiului lui Huygens.

Enunț: Fiecare punct al unui front de undă se poate considera ca punct de plecare al unei unde elementare care se propagă cu aceeași viteză și lungime de undă ca și unda inițială. Noua poziție a undei (noul front de undă) ce s-a propagat este înfășurătoarea tuturor undelor elementare.

Principiul lui Huygens este o metodă de construire a noului front de undă.

6.5 Ecuația undei plane

Să considerăm un mediu elastic în care o particulă aflată în punctul S începe să oscileze armonic, conform ecuației:

$$y_s(t_s) = A \sin(\omega \cdot t_s) = A \sin(2\pi \cdot \nu \cdot t_s) = A \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t_s\right), \quad (6.7)$$

unde A este amplitudinea, ω este pulsația, ν este frecvența de oscilație, T este perioada, t_s timpul scurs de la începerea oscilației în punctul S.

Dacă considerăm particula S care constituie sursa de oscilație, perturbația se va transmite în tot mediul. Ecuația de mișcare (oscilatorie) a unei alte particule N aflată la distanța d de sursa S, va începe după timpul t_d conform ecuației:

$$y_N(t_N) = A \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t_N\right), \quad (6.8)$$

unde t_N timpul scurs de la începerea oscilației în punctul N. Relația dintre aceste intervale de timp este:

$$t_N = t_S - t_d = t_S - \frac{d}{v}, \quad (6.9)$$

astfel ecuația de oscilație a punctului N este dată de:

$$y_N(t_S) = A \sin\left[\frac{2\pi}{T} \cdot \left(t_S - \frac{d}{v}\right)\right] = A \sin\left[2\pi\left(\frac{t_S}{T} - \frac{d}{v \cdot T}\right)\right], \quad (6.10)$$

unde v este undei plane.

Pentru ca amplitudinea A să rămână aceeași este necesar ca oscilația să se transmită fără pierderi de energie. Ținând cont de faptul că lungimea de undă $\lambda = vT$ avem:

$$\Psi_N(x, t) = A \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{v \cdot T}\right)\right] = A \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\right]. \quad (6.11)$$

*Relația (C6.11) reprezintă **ecuația undei plane** și determină poziția punctului oscilant care se află la distanța x de sursă în orice moment de timp. Ecuația undei plane exprimă faptul că elongația y depinde de două variabile, timpul t și distanța x . Ea este periodică în raport cu ambele variabile.*

Periodicitatea în raport cu timpul este evidențiată de ecuația de mișcare care este de tip armonic pentru un punct N aflat la distanța x de

sursă. Periodicitatea în raport cu distanța este evidențiată de faptul că punctele care se găsesc la distanța λ unul de celălalt oscilează în fază.

6.6 Reflexia și refracția undelor. Interferența undelor. Difracția undelor

Studiul experimental al fenomenului de propagare a undelor la suprafața de separație a două medii (care au viteze de propagare a undelor diferite) arată că o parte din ele se întorc în mediul din care au provenit, **se reflectă**, iar cealaltă parte traversează suprafața de separare și se propagă în cel de-al doilea mediu, **se refractă**.

Reflexia Undelor

Definiție: Se numește reflexie, fenomenul de întoarcere al unei în mediul din care a venit la întâlnirea unui obstacol (suprafața de reflexie).

Definiție: Unda care cade pe suprafața de reflexie se numește undă incidentă.

Definiție: Unda formată prin reflexie de pe o suprafață de reflexie se numește undă reflectată.

Definiție: Se numește unghi de incidență, $\hat{i}$ unghiul format între frontul de undă incident descris de raza incidentă și normala la suprafața de reflexie.

Definiție: Se numește unghi de reflexie, $\hat{r}$ unghiul format între frontul de undă reflectat descris de raza reflectată și normală la suprafața de reflexie.

Afirmație: Unghiul de

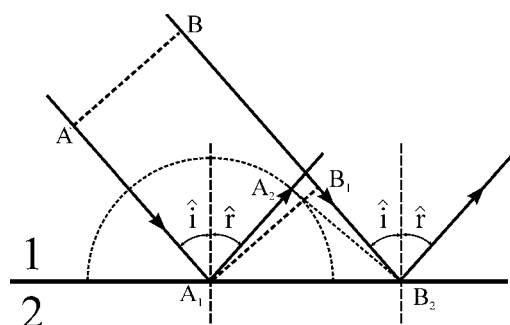


Fig. 6.5 Folosirea principiului lui Huygens pentru deducerea legilor reflexiei.

incidență $\hat{i}$ este egal cu unghiul de reflexie, $\hat{r}$.

$$\hat{i} = \hat{r}. \quad (6.12)$$

Reflexiile pot fi:

- Cu pierdere de jumătate de lungime de undă, $\lambda/2$.
- Fără pierdere de jumătate de lungime de undă, $\lambda/2$.

Ecuția unei plane reflectate este atunci:

$$\Psi_r(x, t) = A \sin \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} + \varphi \right) \right], \quad (6.13)$$

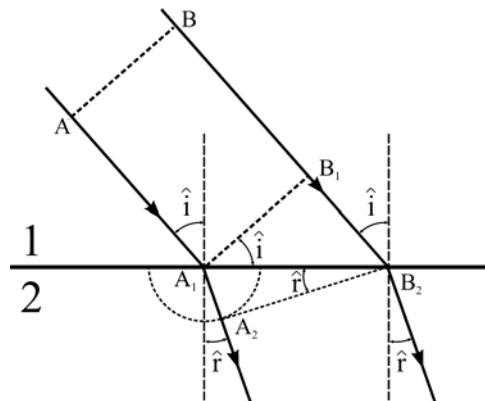
unde $\varphi = \pi$ în primul caz și $\varphi = 0$ în cazul al doilea.

Refracția undelor.

Definiție: Se numește refracție, fenomenul de traversare al unei suprafețe de separație a două medii omogene.

Definiție: Unda formată prin refracție la suprafața de separație se numește undă refractată.

Enunț: Raportul dintre sinusul unghiului de incidență și sinusul unghiului de refracție este egal cu raportul vitezelor de propagare a undelor în cele două medii.



$$\frac{\sin \hat{i}}{\sin \hat{r}} = \frac{B_1 B_2}{A_1 B_2} \frac{A_1 B_2}{A_1 A_2} = \frac{v_1 \Delta t}{v_2 \Delta t} = \frac{v_1}{v_2}. \quad (6.14)$$

Și în cazul refracției ca și în cazul reflexiei raza incidentă, normala și raza refractată se găsesc în același plan.

Fig. 6.6 Folosirea principiului lui Huygens pentru deducerea legilor refracției undelor.

Interferența undelor

Principiul superpoziției: Dacă într-un mediu oarecare se propagă unde emise de mai multe surse de oscilație, atunci fiecare undă se propagă independent de celelalte.

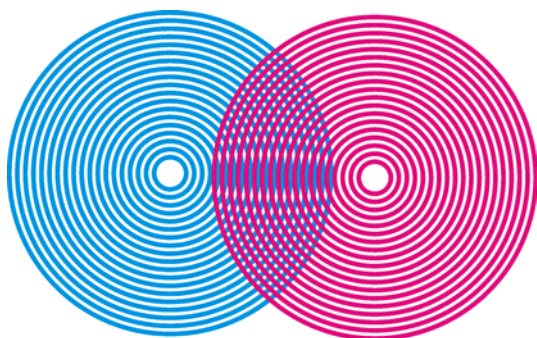


Fig. 6.7 Suprapunerea a două unde coerente conduce la formarea unei imagini de interferență cu maxime și minime.

În acest caz deplasarea rezultată a fiecărei particule este dată de suma vectorială sau algebrică a deplasărilor provocate de fiecare undă în parte.

Definiție: Două unde de aceeași natură care au aceeași direcție de oscilație, aceeași frecvență ν și aceeași lungime de undă, au în fiecare punct diferența de fază constantă și se numesc **unde coerente**.

Definiție: Fenomenul de suprapunere și compunere al undelor coerente se numește interferență.

Să considerăm două unde care provin de la sursele coerente S_1 și S_2 care se întâlnesc în punctul O. Ecuația care descrie oscilația în punctul O datorată undelor provenite de la sursa S_1 este:

$$\Psi_1(d_1, t) = A \sin \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{d_1}{\lambda} \right) \right]. \quad (6.15)$$

Ecuația care descrie oscilația în punctul O datorată undelor provenite de la sursa S_2 este:

$$\Psi_2(d_2, t) = A \sin \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{d_2}{\lambda} \right) \right]. \quad (6.16)$$

Prin adunarea vectorială a celor două oscilații obținem oscilația în punctul O:

$$\Psi(d_1, d_2, t) = y_1(d_1, t) + y_2(d_2, t) = A \sin \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{d_1}{\lambda} \right) \right] + A \sin \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{d_2}{\lambda} \right) \right], \quad (6.17)$$

sau:

$$\Psi(d_1, d_2, t) = 2A \cos \left[\frac{2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{d_1}{\lambda} \right) - 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{d_2}{\lambda} \right)}{2} \right] \cdot \sin \left[\frac{2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{d_1}{\lambda} \right) + 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{d_2}{\lambda} \right)}{2} \right], \quad (6.18)$$

de unde:

$$\Psi(d_1, d_2, t) = 2A \cos \left[\frac{\pi(d_2 - d_1)}{\lambda} \right] \cdot \sin \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{d_1 + d_2}{2\lambda} \right) \right], \quad (6.19)$$

care este de forma:

$$\Psi(d_1, d_2, t) = \mathbf{B} \cdot \sin \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{d}{\lambda} \right) \right], \quad (6.20)$$

care are amplitudinea:

$$B = 2A \cos \left[\frac{\pi(d_2 - d_1)}{\lambda} \right]. \quad (6.21)$$

Se constată că amplitudinea este maximă atunci când:

$$\cos \left[\frac{\pi(d_2 - d_1)}{\lambda} \right] = \pm 1 \Rightarrow \frac{\pi(d_2 - d_1)}{\lambda} = n\pi \Rightarrow \Delta = d_2 - d_1 = n\lambda \Rightarrow \Delta = 2n \frac{\lambda}{2}, \quad (6.22)$$

unde $\Delta = d_2 - d_1$ este diferența de drum iar $n \in 0, 1, 2, \dots$.

Iar amplitudinea este minimă atunci când:

$$\cos \left[\frac{\pi(d_2 - d_1)}{\lambda} \right] = 0 \Rightarrow \frac{\pi(d_2 - d_1)}{\lambda} = (2n + 1) \frac{\pi}{2} \Rightarrow \Delta = (2n + 1) \frac{\lambda}{2}, \quad (6.23)$$

unde $n \in 0, 1, 2, \dots$.

În punctele pentru care diferența de drum Δ este egală cu un număr par de semilungimi de undă se obține o amplitudine maximă.

În punctele pentru care diferența de drum Δ este egală cu un număr impar de semilungimi de undă se obține o amplitudine minimă.

Difracția undelor

Definiție: Abaterea undelor de la direcția inițială de propagare la traversarea unor orificii sau la întâlnirea unor obstacole se numește difracție.

În cazul difracției undele se propagă tot timpul în același mediu fără schimbarea parametrilor ce o caracterizează.

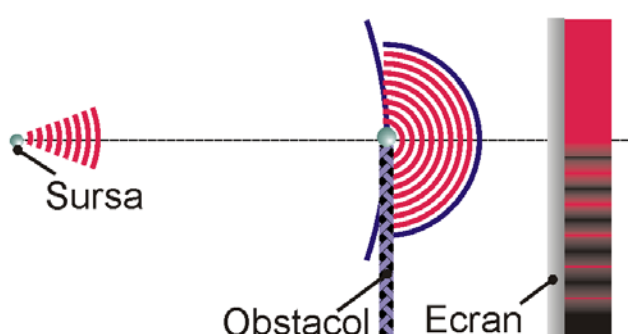


Fig. 6.8 Difracția undelor și apariția unei imagini cu maxime și minime în umbra geometrică a obstacolului.

Observații experimentale ale difracției undelor:

- Cu cât în planul obstacolului se ecranează mai puține unde elementare, cu atât mai mult se împrăstie ele în

spațiul geometric de umbră.

- Același fenomen apare și în cazul orificiilor.
- Dacă se face experiența cu unde de diferite lungimi de undă se constată că determinant pentru fenomenul de difracție este raportul dintre lungimea de undă și mărimea obstacolului.

Pe măsura creșterii dimensiunilor orificiilor sau obiectelor și a micșorării lungimi de undă, fenomenul de difracție devine mai slab și cu atât mai conturat, se detașează partea difractată a fronturilor de undă de partea nedifractată. Difracția este deosebit de pronunțată atunci când dimensiunile obstacolelor difractante sunt comparabile cu lungimea de undă.

6.7 Unde staționare

Un caz particular al interferenței undelor este producerea undelor staționare.

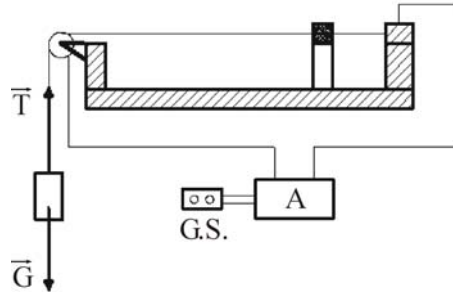


Fig. 6.9 Dispozitiv experimental pentru punerea în evidență a undelor transversale în corzi vibrante.

Definiție: Undele staționare se obțin prin compunerea a două unde plane cu aceeași amplitudine și perioadă.

Să presupunem că o undă se propagă de-a lungul unei drepte AA' numită și undă directă. În punctul A' această undă se reflectă și pierde o

jumătate de lungime de undă. Ecuația undei directe este:

$$\Psi_d(x, t) = A \cdot \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\right], \quad (6.24)$$

iar ecuația undei reflectate este:

$$\Psi_r(x, t) = A \cdot \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{2l - x}{\lambda}\right) - \pi\right], \quad (6.25)$$

Prin compunerea celor două unde obținem:

$$\begin{aligned} \Psi(x, t) &= \Psi_d(x, t) + \Psi_r(x, t) \\ &= A \cdot \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{l - x}{\lambda}\right)\right] + A \cdot \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{l + x}{\lambda}\right) - \pi\right], \quad (6.26) \\ &= 2A \cos\left[2\pi\frac{x}{\lambda} + \frac{\pi}{2}\right] \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{l}{\lambda}\right) - \frac{\pi}{2}\right] \end{aligned}$$

care se poate scrie sub forma:

$$\Psi(x, t) = 2A \sin\left[2\pi\frac{x}{\lambda}\right] \cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{l}{\lambda}\right)\right], \quad (6.27)$$

care are amplitudinea maximă pentru:

$$\sin\left[2\pi\frac{x}{\lambda}\right] = \pm 1, \quad (6.28)$$

astfel:

$$2\pi\frac{x}{\lambda} = (2n+1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow x = (2n+1)\frac{\lambda}{2}. \quad (6.29)$$

Punctele care au valori maxime ale amplitudinii se numesc ventre.

Iar amplitudinea minimă se obține pentru:

$$\sin\left[2\pi\frac{x}{\lambda}\right] = 0, \quad (6.30)$$

astfel:

$$2\pi\frac{x}{\lambda} = (2n)\frac{\pi}{2} \Rightarrow x = 2n\frac{\lambda}{4} = n\frac{\lambda}{2}. \quad (6.31)$$

Punctele care au valori minime ale amplitudinii se numesc noduri.

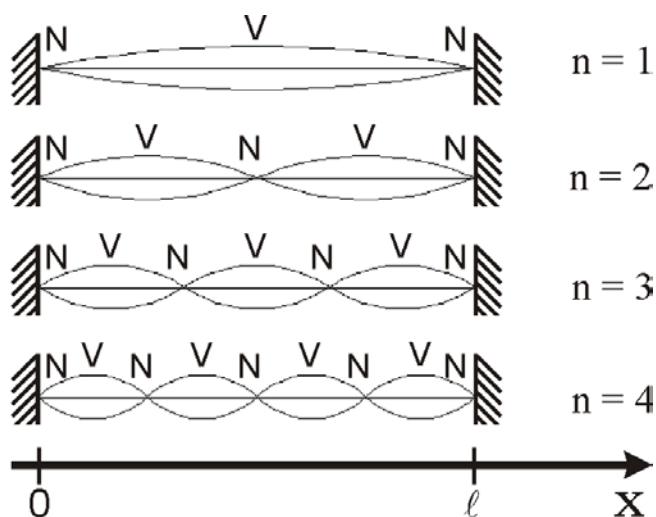


Fig. 6.10 Modurile de vibrație, fundamentală și primele trei armonice, într-o coardă vibrantă. Apariția nodurilor și a ventrelor.